

Roll No. 

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

  
रोल नं.

**Series SSR/2**

Code No. **65/2/1**  
कोड नं.

- Please check that this question paper contains 8 printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains 29 questions.
- Please write down the serial number of the question before attempting it.
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 8 हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं ।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।

## MATHEMATICS

### गणित

Time allowed : 3 hours

निर्धारित समय : 3 घण्टे

Maximum Marks : 100

अधिकतम अंक : 100

#### General Instructions :

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) The question paper consists of 29 questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of 10 questions of **one mark** each, Section B comprises of 12 questions of **four marks** each and Section C comprises of 7 questions of **six marks** each.
- (iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.
- (iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.
- (v) Use of calculators is **not** permitted.

#### सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में 10 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है । खण्ड ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है । खण्ड स में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है ।

- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है ।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

### SECTION A

#### खण्ड अ

1. Let \* be a binary operation defined by  $a * b = 3a + 4b - 2$ . Find  $4 * 5$ .  
मान लीजिए \* एक द्विआधारी संक्रिया इस प्रकार परिभाषित है कि  $a * b = 3a + 4b - 2$ .  
तो  $4 * 5$  ज्ञात कीजिए ।

2. Show that  $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\sin^{-1}x$ .

दर्शाइए कि  $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\sin^{-1}x$ .

3. If  $\begin{vmatrix} 2x+5 & 3 \\ 5x+2 & 9 \end{vmatrix} = 0$ , find x.

यदि  $\begin{vmatrix} 2x+5 & 3 \\ 5x+2 & 9 \end{vmatrix} = 0$ , तो x ज्ञात कीजिए ।

4. If  $\begin{bmatrix} x+3 & 4 \\ y-4 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ , find x and y.

यदि  $\begin{bmatrix} x+3 & 4 \\ y-4 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ , x तथा y ज्ञात कीजिए ।

5. Evaluate :

$$\int \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 6x^2 + 5} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 6x^2 + 5} dx$$

6. Evaluate :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

7. If  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$  and  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$ , find the angle between  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$ .

यदि  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$  तथा  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$ , तो  $\vec{a}$  तथा  $\vec{b}$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

8. The cartesian equation of a line AB is

$$\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Find the direction cosines of a line parallel to AB.

रेखा AB का कार्तीय समीकरण

$$\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{3} \text{ है।}$$

AB के समान्तर एक रेखा की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

9. If  $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$  and  $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k}$ , find a unit vector parallel to  $\vec{a} + \vec{b}$ .

यदि  $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$  तथा  $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k}$ , तो सदिश  $\vec{a} + \vec{b}$  के समान्तर एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

10. Construct a  $2 \times 2$  matrix whose element  $a_{ij}$  is given by  $a_{ij} = i + 2j$ .

$2 \times 2$  का एक आव्यूह बनाइए जिसका  $a_{ij}$  अवयव  $a_{ij} = i + 2j$  द्वारा परिभाषित है।

## SECTION B

### खण्ड ब

11. Show that the relation R defined by

$$R = \{(a, b) : a - b \text{ is divisible by } 3; a, b \in \mathbb{N}\}$$

is an equivalence relation.

दर्शाइए कि निम्न द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R

$$R = \{(a, b) : a - b, 3 \text{ से विभाज्य है}; a, b \in \mathbb{N}\}$$

एक तुल्यता सम्बन्ध है।

12. Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 + bc & a^3 \\ 1 & b^2 + ca & b^3 \\ 1 & c^2 + ab & c^3 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2)$$

OR

Solve for x :

$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 + bc & a^3 \\ 1 & b^2 + ca & b^3 \\ 1 & c^2 + ab & c^3 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2)$$

अथवा

x के लिए हल कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

13. Prove that :

$$\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \pi$$

OR

Solve for x :

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{31}\right)$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \pi$$

अथवा

x के लिए हल कीजिए :

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{31}\right)$$

$$14. \text{ Let } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin^3 x}{3 \cos^2 x}, & \text{if } x < \frac{\pi}{2} \\ a, & \text{if } x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{b(1 - \sin x)}{(\pi - 2x)^2}, & \text{if } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

If  $f(x)$  be a continuous function at  $x = \frac{\pi}{2}$ , find a and b.

$$\text{मान लीजिए कि } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin^3 x}{3 \cos^2 x}, & \text{यदि } x < \frac{\pi}{2} \\ a, & \text{यदि } x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{b(1 - \sin x)}{(\pi - 2x)^2}, & \text{यदि } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

यदि फलन  $f(x)$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  पर एक सतत फलन हो, तो  $a$  और  $b$  के मान ज्ञात कीजिए ।

15. If  $y = [\log(x + \sqrt{1+x^2})]^2$ , show that

$$(1+x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

OR

If  $y = x^x + (\sin x)^x$ , find  $\frac{dy}{dx}$ .

यदि  $y = [\log(x + \sqrt{1+x^2})]^2$ , तो दर्शाइए कि

$$(1+x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

अथवा

यदि  $y = x^x + (\sin x)^x$ , तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए ।

16. Find the points on the curve  $y = x^3$  at which the slope of the tangent is equal to  $y$ -coordinate of the point.

वक्र  $y = x^3$  पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिन्दु के  $y$ -निर्देशांक के बराबर है ।

17. Evaluate :

$$\int \frac{x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

OR

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x}$$

18. Solve the following differential equation :

$$x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0$$

19. Solve the following differential equation :

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

20. Show that the area of the parallelogram having diagonals  $(3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$  and  $(\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$  is  $5\sqrt{3}$  sq. units.

दर्शाए कि उस समान्तर चतुर्भुज, जिसके विकर्ण  $(3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$  और  $(\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$  हैं, का क्षेत्रफल  $5\sqrt{3}$  वर्ग इकाई है ।

21. Find the shortest distance between the lines  $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$  and  $\vec{r} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + \mu(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$ .

रेखाओं  $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$  तथा

$\vec{r} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + \mu(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$  के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए ।

22. Two cards are drawn simultaneously from a well shuffled pack of 52 cards. Find the mean and standard deviation of the number of kings.

52 पत्तों की अच्छी तरह से फेंटी गई ताश की गड्डी में से दो पत्ते एक-साथ निकाले गए । बादशाहों (Kings) की संख्या का माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

SECTION C

खण्ड स

23. Using matrices, solve the following system of linear equations :

$$x + 3y + 4z = 8$$

$$2x + y + 2z = 5$$

$$5x + y + z = 7$$

OR

Using elementary transformations, find the inverse of the following matrix :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

आव्यूहों का प्रयोग करके निम्न रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + 3y + 4z = 8$$

$$2x + y + 2z = 5$$

$$5x + y + z = 7$$

अथवा

प्रारम्भिक रूपान्तरणों का प्रयोग करके निम्न आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

24. A point on the hypotenuse of a triangle is at distances  $a$  and  $b$  from the sides. Show that the minimum length of the hypotenuse is  $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$ .

OR

Prove that the volume of the largest cone that can be inscribed in a sphere of radius  $R$  is  $\frac{8}{27}$  of the volume of the sphere.

एक त्रिभुज के कर्ण पर एक बिन्दु इस प्रकार स्थित है कि वह उसकी भुजाओं से  $a$  तथा  $b$  दूरियों पर है। दर्शाइए कि कर्ण की न्यूनतम लम्बाई  $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$  है।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि  $R$  त्रिज्या के गोले के अन्तर्गत बड़े से बड़े शंकु का आयतन गोले के आयतन का  $\frac{8}{27}$  भाग होता है।

25. Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4 \sin x}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4 \sin x}$$

26. Using integration, find the area of the triangle whose vertices are A(0, 5), B(-1, 1) and C(3, 2).

समाकलन का प्रयोग करते हुए उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A(0, 5), B(-1, 1) और C(3, 2) हैं ।

27. Find the distance of the point (1, -2, 3) from the plane  $x - y + z = 5$  measured parallel to the line  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-6}$ .

बिन्दु (1, -2, 3) की तल  $x - y + z = 5$  से वह दूरी ज्ञात कीजिए जो रेखा  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-6}$  के समान्तर मापी गई है ।

28. A farmer has a supply of chemical fertilizer of type A which contains 10% nitrogen and 5% phosphoric acid, and type B which contains 6% nitrogen and 10% phosphoric acid. After testing the soil conditions of the field, it was found that at least 14 kg of nitrogen and 14 kg of phosphoric acid is required for producing a good crop. The fertilizer of type A costs Rs. 5 per kg and the type B costs Rs. 3 per kg. How many kg of each type of the fertilizer should be used to meet the requirement at the minimum possible cost ? Using L.P.P. solve the above problem graphically.

एक किसान को A प्रकार की रासायनिक खाद सुलभ है जिसमें 10% नाइट्रोजन और 5% फॉस्फोरिक अम्ल है, तथा B प्रकार की खाद जिसमें 6% नाइट्रोजन और 10% फॉस्फोरिक अम्ल है । खेत की भूमि का परीक्षण करने पर यह पाया गया कि उत्तम फसल पैदा करने के लिए कम-से-कम 14 किग्रा नाइट्रोजन और 14 किग्रा फॉस्फोरिक अम्ल की आवश्यकता है । A प्रकार की खाद 5 रु. प्रति किग्रा और B प्रकार की खाद 3 रु. प्रति किग्रा की दर से मिलती है । प्रत्येक प्रकार की कितनी-कितनी खाद क्रय करने पर आवश्यकता की पूर्ति न्यूनतम व्यय पर संभव हो सकेगी, ज्ञात कीजिए । उपरोक्त को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।

29. In a factory which manufactures bolts, machines A, B and C, manufacture respectively 25%, 35% and 40% of the bolts. Of their output 5, 4 and 2 percent are respectively defective bolts. A bolt is drawn at random from the total production and is found to be defective. Find the probability that it is manufactured by the machine B.

एक बोल्ट बनाने के कारखाने में मशीनें A, B और C कुल उत्पादन का क्रमशः 25%, 35% तथा 40% बोल्ट बनाती हैं । इन मशीनों के उत्पादन के क्रमशः 5, 4 तथा 2 प्रतिशत बोल्ट त्रुटिपूर्ण पाए जाते हैं । बोल्टों के कुल उत्पादन में से एक बोल्ट यादृच्छया निकाला गया और खराब पाया गया । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया था ।