

XII - 2009

Series SSO/2

Code No. 65/2/1

कोड नं.

Roll No.

रोल नं.

--	--	--	--	--	--	--	--

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

- Please check that this question paper contains 11 printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains 29 questions.
- Please write down the Serial Number of the question before attempting it.
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the student will read the question paper only and will not write any answer on the answer script during this period.
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 11 हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं ।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।

## MATHEMATICS

### गणित

Time allowed : 3 hours

Maximum Marks : 100

निर्धारित समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

**General Instructions :**

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) The question paper consists of **29** questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of **10** questions of **one mark** each, Section B comprises of **12** questions of **four marks** each and Section C comprises of **7** questions of **six marks** each.
- (iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.
- (iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.
- (v) Use of calculators is **not** permitted.

**सामान्य निर्देश :**

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में **10** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है । खण्ड ब में **12** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है । खण्ड स में **7** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है ।
- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है ।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

## SECTION A

### खण्ड अ

Questions number 1 to 10 carry 1 mark each.

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. Evaluate :

$$\int \frac{1}{x + x \log x} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{1}{x + x \log x} dx$$

2. Evaluate :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$$

3. If the binary operation  $*$ , defined on  $\mathbb{Q}$ , is defined as

$a * b = 2a + b - ab$ , for all  $a, b \in \mathbb{Q}$ , find the value of  $3 * 4$ .

यदि एक द्विआधारी संक्रिया  $*$ , समुच्चय  $\mathbb{Q}$  पर इस प्रकार परिभाषित है कि

$a * b = 2a + b - ab$ , सभी  $a, b \in \mathbb{Q}$  के लिए, तो  $3 * 4$  का मान ज्ञात कीजिए।

4. If  $\begin{pmatrix} y + 2x & 5 \\ -x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ , find the value of  $y$ .

यदि  $\begin{pmatrix} y + 2x & 5 \\ -x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ , तो  $y$  का मान ज्ञात कीजिए।

5. Find a unit vector in the direction of  $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ .

सदिश  $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$  की दिशा में एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

6. Find the direction cosines of the line passing through the following points :

$$(-2, 4, -5), (1, 2, 3)$$

निम्न बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा की दिक्-कोज्याएँ ज्ञात कीजिए :

$$(-2, 4, -5), (1, 2, 3)$$

7. If  $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 9 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$  and  $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ,

then find  $a_{22} + b_{21}$ .

यदि  $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 9 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$  तथा  $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ,

तो  $a_{22} + b_{21}$  ज्ञात कीजिए ।

8. If  $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 2$  and  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$ , find the angle between  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$ .

यदि  $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 2$  तथा  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$  है, तो  $\vec{a}$  तथा  $\vec{b}$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

9. If  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ , then find the value of k if  $|2A| = k|A|$ .

यदि  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ , तो k का मान ज्ञात कीजिए यदि  $|2A| = k|A|$ .

10. Write the principal value of  $\tan^{-1} \left[ \tan \frac{3\pi}{4} \right]$ .

$\tan^{-1} \left[ \tan \frac{3\pi}{4} \right]$  का मुख्य मान लिखिए ।

## SECTION B

खण्ड ब

Questions number 11 to 22 carry 4 marks each.

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं।

11. Evaluate :

$$\int \frac{\cos x, dx}{(2 + \sin x)(3 + 4 \sin x)}$$

OR

Evaluate :

$$\int x^2 \cdot \cos^{-1} x dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\cos x dx}{(2 + \sin x)(3 + 4 \sin x)}$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int x^2 \cdot \cos^{-1} x dx$$

12. Show that the relation  $R$  in the set of real numbers, defined as  $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$  is neither reflexive, nor symmetric, nor transitive.

दर्शाइए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में  $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$  द्वारा परिभाषित सम्बन्ध  $R$ , न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

13. If  $\log(x^2 + y^2) = 2 \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$ , then show that  $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$ .

OR

If  $x = a(\cos t + t \sin t)$  and  $y = a(\sin t - t \cos t)$ , then find  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

यदि  $\log(x^2 + y^2) = 2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$  है, तो दर्शाइए कि  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ .

अथवा

यदि  $x = a(\cos t + t \sin t)$  तथा  $y = a(\sin t - t \cos t)$  है, तो  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ज्ञात कीजिए।

14. Find the equation of the tangent to the curve  $y = \sqrt{4x - 2}$  which is parallel to the line  $4x - 2y + 5 = 0$ .

OR

Using differentials, find the approximate value of  $f(2.01)$ , where  $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 2$ .

वक्र  $y = \sqrt{4x - 2}$  की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $4x - 2y + 5 = 0$  के समांतर है।

अथवा

अवकलों का प्रयोग करके  $f(2.01)$  का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए जहाँ  $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 2$  है।

15. Prove the following :

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{2} \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right).$$

OR

Solve the following for  $x$  :

$$\cos^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{2} \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right).$$

अथवा

निम्न को  $x$  के लिए हल कीजिए :

$$\cos^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

16. Find the angle between the line  $\frac{x+1}{2} = \frac{3y+5}{9} = \frac{3-z}{-6}$  and the plane  $10x + 2y - 11z = 3$ .

रेखा  $\frac{x+1}{2} = \frac{3y+5}{9} = \frac{3-z}{-6}$  और समतल  $10x + 2y - 11z = 3$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

17. Solve the following differential equation :

$$(x^3 + y^3) dy - x^2y dx = 0$$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(x^3 + y^3) dy - x^2y dx = 0$$

18. Find the particular solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x, (x \neq 0), \text{ given that } y = 0 \text{ when } x = \frac{\pi}{2}.$$

अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x, (x \neq 0)$  का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए,

जबकि दिया हुआ है कि  $y = 0$  जब  $x = \frac{\pi}{2}$ .

19. Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac \\ ab & b^2 + 1 & bc \\ ca & cb & c^2 + 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2.$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर, निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac \\ ab & b^2 + 1 & bc \\ ca & cb & c^2 + 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2.$$

20. The probability that A hits a target is  $\frac{1}{3}$  and the probability that B hits it is  $\frac{2}{5}$ . If each one of A and B shoots at the target, what is the probability that

- (i) the target is hit ?
- (ii) exactly one of them hits the target ?

A के लक्ष्यभेदन की प्रायिकता  $\frac{1}{3}$  तथा B के लक्ष्यभेदन की प्रायिकता  $\frac{2}{5}$  है। यदि A तथा B दोनों लक्ष्यभेदन का प्रयास करें, तो प्रायिकता क्या है कि

- (i) लक्ष्यभेदन हो जाए ?
- (ii) उनमें से केवल एक लक्ष्यभेदन करे ?

21. Find  $\frac{dy}{dx}$ , if  $y^x + x^y = a^b$ , where a, b are constants.

$\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए, यदि  $y^x + x^y = a^b$  है, जहाँ a, b अचर हैं।

22. If  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  are three vectors such that  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$  and  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ,  $\vec{a} \neq 0$ , then show that  $\vec{b} = \vec{c}$ .

यदि  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  तीन ऐसे सदिश हैं कि  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$  तथा  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ,  $\vec{a} \neq 0$  है, तो दर्शाइए कि  $\vec{b} = \vec{c}$ .

## SECTION C

### खण्ड स

Questions number 23 to 29 carry six marks each.

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

23. One kind of cake requires 200 g of flour and 25 g of fat, and another kind of cake requires 100 g of flour and 50 g of fat. Find the maximum number of cakes which can be made from 5 kg of flour and 1 kg of fat assuming that there is no shortage of the other ingredients used in making the cakes. Formulate the above as a linear programming problem and solve graphically.

एक प्रकार के केक को 200 ग्राम आटा तथा 25 ग्राम वसा (fat) की आवश्यकता होती है तथा दूसरी प्रकार के केक के लिए 100 ग्राम आटा तथा 50 ग्राम वसा की आवश्यकता होती है । केकों की अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए जो 5 किलोग्राम आटे तथा 1 किलोग्राम वसा से बन सकते हैं, यह मानते हुए कि केकों को बनाने के लिए अन्य पदार्थों की कमी नहीं रहेगी । उपर्युक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बना कर ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।

24. Using integration, find the area of the region :

$$((x, y) : 9x^2 + y^2 \leq 36 \text{ and } 3x + y \geq 6)$$

समाकलन का प्रयोग करते हुए, निम्न क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

$$((x, y) : 9x^2 + y^2 \leq 36 \text{ और } 3x + y \geq 6)$$

25. Show that the lines  $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$  ;

$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$  are coplanar. Also find the equation of the plane containing the lines.

दर्शाइए कि रेखाएँ  $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$  ;  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$

समतलीय हैं । उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए जिसमें उपर्युक्त रेखाएँ स्थित हैं ।

26. Show that the height of the cylinder of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius  $R$  is  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ . Also find the maximum volume.

OR

Show that the total surface area of a closed cuboid with square base and given volume, is minimum, when it is a cube.

दर्शाइए कि एक  $R$  त्रिज्या वाले गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$  है। अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए।

अथवा

दर्शाइए कि एक बंद घनाभ, जिसका आधार वर्गाकार तथा आयतन दिया गया है, का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होगा, यदि घनाभ एक घन है।

27. Using matrices, solve the following system of linear equations :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

आव्यूहों का प्रयोग कर, निम्न रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

28. Evaluate :

$$\int \frac{x^4 dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

OR

Evaluate :

$$\int_1^4 [ |x-1| + |x-2| + |x-4| ] dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^4 dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^4 [ |x-1| + |x-2| + |x-4| ] dx$$

29. Two cards are drawn simultaneously (or successively without replacement) from a well shuffled pack of 52 cards. Find the mean and variance of the number of red cards.

ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते एक साथ (या उत्तरोत्तर, बिना प्रतिस्थापना के) निकाले जाते हैं। लाल पत्तों की संख्या का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए।